

Anton NEGRILĂ
Maria NEGRILĂ

matematică
algebră
geometrie

clasa a VII-a

partea I

ediția a XIV-a, revizuită



mate 2000 – consolidare

Cuprins

RECAPITULARE ȘI EVALUARE INIȚIALĂ

Teste cu exerciții și probleme recapitulative pentru pregătirea testării inițiale	
Algebră	5
Geometrie	11

ALGEBRĂ

Capitolul I. MULȚIMEA NUMERELOR REALE

Rădăcina pătrată	14
1. Rădăcina pătrată a unui număr natural pătrat perfect	14
<i>Test de autoevaluare</i>	19
2. Rădăcina pătrată a unui număr rațional nenegativ	21
<i>Test de autoevaluare</i>	27
Mulțimea numerelor reale	29
1. Modulul unui număr real. Reprezentarea pe axă a numerelor reale. Aproximări și rotunjiri. Ordonări	29
Recapitulare și sistematizare prin teste	34
2. Reguli de calcul cu radicali	35
2.1. Produsul radicalilor	35
2.2. Câtul radicalilor	35
2.3. Scoaterea factorilor de sub radical	36
2.4. Introducerea factorilor sub radical	37
3. Operații cu numere reale	39
<i>Test de autoevaluare</i>	49
4. Raționalizarea numitorului unei fracții	51
Exerciții recapitulative. Operații cu numere reale. Raționalizarea numitorilor	60
5. Formule de calcul prescurtat	64
6. Media geometrică a două numere reale nenegative	66
Exerciții recapitulative. Media aritmetică și media geometrică a numerelor reale	69
7. Probleme de matematică aplicată în viața cotidiană	70
Recapitulare și sistematizare prin teste	71
<i>Test de autoevaluare</i>	75
8. Ecuații de forma $x^2 = a$, $a \in \mathbb{R}$	77
9. Probleme de matematică aplicată în viața cotidiană	80
Recapitulare și sistematizare prin teste	81

PROBLEME PENTRU PERFORMANȚĂ ȘCOLARĂ ȘI PREGĂTIREA OLIMPIADELOR

84

GEOMETRIE

Capitolul I. PATRULATERE

1. Patrulatere convexe	87
2. Paralelogramul	89
<i>Test de autoevaluare</i>	93
Recapitulare și sistematizare prin teste	95

3. Linia mijlocie în triunghi.....	96
Recapitulare și sistematizare prin teste	99
4. Dreptunghiul	100
<i>Test de autoevaluare</i>	103
5. Rombul.....	105
<i>Test de autoevaluare</i>	107
6. Pătratul	109
Recapitulare și sistematizare prin teste	111
<i>Test de autoevaluare</i>	113
7. Centrul de simetrie și axe de simetrie pentru poligoanele studiate.....	115
8. Trapezul.....	117
9. Linia mijlocie în trapez	119
<i>Test de autoevaluare</i>	121
10. Aria triunghiului și aria patrulaterului.....	123
<i>Test de autoevaluare</i>	131
11. Probleme de matematică aplicată în viața cotidiană.....	133
Recapitulare și sistematizare prin teste	134
Capitolul II. CERCUL	
Cercul	136
1. Pozițiile relative ale unei drepte față de un cerc.....	138
2. Triunghi și patrulater înscrise într-un cerc	142
3. Poligoane regulate înscrise într-un cerc	145
4. Lungimea cercului și aria discului.....	147
Recapitulare și sistematizare prin teste	148
<i>Test de autoevaluare</i>	151
MODELE DE TESTE PENTRU EVALUAREA FINALĂ	153
TESTE RECAPITULATIVE	156
PROBLEME PENTRU PERFORMANȚĂ ȘCOLARĂ ȘI PREGĂTIREA OLIMPIADELOR	158
INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI	160

Recapitulare și evaluare inițială

PE Teste cu exerciții și probleme recapitulative pentru pregătirea testării inițiale

ALGEBRĂ

☀ TESTUL 1 ☀

1. a) Se consideră numerele:

$$a = (-4) \cdot (+6) - [(-24) : (+3) - (-28) : (-7) - (+16) : (-8)] \text{ și}$$

$$b = [(-6) \cdot (+2) - (-5) \cdot (+3) - (-7) \cdot (-3)] : (-12 + 15).$$

Calculați $n = a - b$.

b) Se consideră numerele:

$$x = (-3) \cdot (+7) - [(-18) : (+3) - (+24) : (-6) + (-32) : (-4)] \cdot (-11 + 9) \text{ și}$$

$$y = [(-7) \cdot (+4) - (-8) \cdot (+3) - (-6) \cdot (-2)] : (-6 + 8).$$

Calculați $n = x + y$.

2. Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuațiile:

a) $27 - 3(2x - 3) = 18;$

b) $2(3x + 4) - 15 = 11;$

c) $2(5x - 13) + 33 = 3(2x + 1) + 20;$

d) $3x + 5 - 2(x + 2) = 8 + 3(x - 1).$

3. Rezolvați în mulțimea numerelor naturale inecuațiile:

a) $11 - 2(3x - 4) > 1;$

b) $2(2x + 1) + 13 \leq 3(x - 1) + 22;$

c) $17x + 19 \leq 6(2x + 5) + 2(x - 5) + 11.$

4. Rezolvați în mulțimea numerelor întregi inecuațiile:

a) $|x + 3| \leq 2;$

b) $|2x + 5| < 9;$

c) $2[3 \cdot |2x - 7| - 7] - 23 < 17.$

5. Determinați valorile întregi ale lui n , pentru care:

a) $\frac{n+10}{n+1} \in \mathbb{Z};$

b) $\frac{3n+14}{n+2} \in \mathbb{Z};$

c) $\frac{4n+7}{2n-1} \in \mathbb{Z};$

d) $\frac{3n+8}{2n+1} \in \mathbb{Z}.$

6. Calculați:

a) $\left(-\frac{5}{16}\right) \cdot \left(+\frac{8}{25}\right) + \left(-\frac{12}{25}\right) \cdot \left(-\frac{15}{16}\right);$ b) $\left(+\frac{16}{21}\right) \cdot \left(-\frac{35}{32}\right) - \left(-\frac{24}{49}\right) \cdot \left(+\frac{21}{32}\right);$

c) $\left(-\frac{5}{18} + \frac{7}{12}\right) \cdot \left(-1\frac{1}{11}\right) - \left(-\frac{13}{24} + \frac{7}{18}\right) \cdot \left(-1\frac{5}{22}\right);$

d) $\left(-\frac{1}{10} + \frac{2}{15}\right) \cdot \left(-7\frac{1}{2}\right) + (-4) \cdot \left(-\frac{7}{20} + \frac{4}{15}\right).$

7. Numerele 377, 517 și 803, împărțite la același număr natural nenul n , dau câturile nenule și resturile egale cu 17, 13 și, respectiv, 11. Determinați valorile împărțitorului n .

8. Determinați cel mai mic număr natural n , care împărțit pe rând la 20, 24 și, respectiv, 28, se obțin câturile nenule, iar resturile egale cu 14, 18 și, respectiv, 22.

9. Determinați cifrele a și b , astfel încât următoarele relații să fie adevărate:

a) $\overline{a24b} : 12$; b) $\overline{a68b} : 18$; c) $\overline{7a4b} : 36$.

10. a) Determinați numerele naturale nenule a și b , cu $a < b$, pentru care $(a; b) = 12$ și $[a; b] = 504$.

b) Se consideră numerele naturale nenule a și b , cu $a < b$, pentru care $(a; b) = 15$ și $[a; b] = 1575$. Determinați valorile diferenței $b - a$.

11. Arătați că pentru orice număr natural n , fracțiile de mai jos sunt ireductibile:

a) $\frac{9n+17}{12n+23}$; b) $\frac{8n+11}{12n+17}$; c) $\frac{6n+7}{9n+10}$; d) $\frac{9n+11}{12n+15}$.

12. Arătați că, pentru orice număr natural n , numărul

$$A = 3^{n+1} \cdot 2^{2n} \cdot 24 + 3^{n+2} \cdot 2^{2n+2} + 2^{n+3} \cdot 6^n - 3^{n+1} \cdot 4^{n+2}$$

se divide cu 17.

13. Arătați că, pentru orice număr natural n , numărul

$$A = 4^{n+4} - 5 \cdot 4^{n+3} + 7 \cdot 4^{n+2} - 3 \cdot 4^{n+1} + 6 \cdot 4^n$$

este divizibil cu 21.

✿ TESTUL 2 ✿

1. a) Se consideră numerele:

$$a = (-7 + 11) \cdot [(+7) \cdot (-5) - (-8) \cdot (+4)] \text{ și } b = (-12 + 9) \cdot [(-5) \cdot (+9) + (-6) \cdot (-8)].$$

Calculați $n = a - 2b$.

b) Se consideră numerele:

$$x = (-8 + 12) \cdot [(-7) \cdot (-6) - (-8) \cdot (-9) - (+3) \cdot (-8)] \text{ și } y = (-15 + 12) \cdot [(-72) : (-9) - (-56) : (+8) - (-54) : (-6)].$$

Calculați $n = x - y$.

2. Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuațiile:

a) $5x - 2(x - 7) - 9 = x + 15$; b) $3(2x + 7) - 14 = 2(2x - 5) + 3$;
c) $2[3(2x - 3) - 8] - 9 = 5$; d) $3(3x + 4) - 5 = 2(2x + 7) + 13$.

3. Rezolvați în mulțimea numerelor întregi inecuațiile:

a) $|x + 4| < 3$; b) $2 \cdot |x - 2| + 7 \leq 13$; c) $|2x - 1| < 7$.

4. Calculați:

a) $\left(-\frac{15}{16}\right) \cdot \left(+\frac{28}{25}\right) - \left(-\frac{12}{25}\right) \cdot \left(+\frac{15}{18}\right)$; b) $\left(-\frac{16}{21}\right) \cdot \left(+1\frac{3}{32}\right) - \left(-\frac{26}{45}\right) \cdot \left(+\frac{10}{13}\right)$;
c) $\left(-\frac{7}{10} + \frac{8}{15}\right) : \left(-\frac{4}{15}\right) - \left(-\frac{8}{15} + \frac{9}{20}\right) \cdot \left(-2\frac{1}{4}\right)$; d) $\left[-\frac{4}{7} + \left(-\frac{3}{35}\right) : \left(-\frac{9}{25}\right)\right] : \left(-\frac{2}{7}\right)$.

5. Determinați valorile întregi ale lui n , pentru care:

a) $\frac{n+9}{n+1} \in \mathbb{Z}$; b) $\frac{2n+16}{n+2} \in \mathbb{Z}$; c) $\frac{4n+33}{2n-1} \in \mathbb{Z}$; d) $\frac{3n+19}{2n+1} \in \mathbb{Z}$.

6. Împărțind numerele 229, 197 și 263 la același număr natural nenul, se obțin câturile nenule și resturile 13, 17 și, respectiv, 11. Aflați toate valorile împărțitorului.

7. Determinați numerele naturale nenule a și b , cu $a < b$, pentru care $(a; b) = 12$ și $[a; b] = 360$.

8. Determinați cel mai mic număr natural nenul, știind că împărțindu-l pe rând la 27, 36 și, respectiv, 48, se obțin câturile nenule, iar resturile egale cu 21, 30 și, respectiv, 42.

GEOMETRIE

✿ TESTUL 1 ✿

1. Se consideră triunghiul isoscel ABC , cu $AB \equiv AC$ și $AM \equiv AN$, unde $M \in AB$, iar $N \in AC$ și $BN \cap CM = \{P\}$. Arătați că:

- a) $BN \equiv CM$; b) $PM \equiv PN$; c) $AP \perp BC$.

2. În figura alăturată, triunghiurile ABC și PMC sunt echilaterale, punctul M este mijlocul laturii BC , iar punctul N este piciorul perpendicularei duse din M pe latura AC .

- a) Arătați că dreptele AB și CP sunt paralele.
b) Calculați măsura unghiului ABP .

c) Dacă pe semidreapta AB se ia un punct T astfel încât punctul B să fie interior segmentului AT , iar $BT = \frac{AB}{2}$, arătați că punctele T, M

și N sunt coliniare.

3. Se consideră triunghiul ABC , iar punctul D este mijlocul laturii BC , astfel încât $AD \equiv BD \equiv CD$.

- a) Arătați că $\sphericalangle BAC = 90^\circ$. b) Dacă $\sphericalangle B = 2\sphericalangle C$, arătați că $BC = 2AB$.

4. Se consideră triunghiul isoscel ABC , $AB \equiv AC$, în care punctele D și E sunt mijloacele laturilor AC și AB . Știind că punctul M este simetricul punctului C față de E și N este simetricul punctului B față de D , demonstrați că:

- a) $BD \equiv CE$; b) $AM \equiv AN$;
c) punctele M, A, N sunt coliniare.

5. Se consideră triunghiul isoscel ABC , $AB \equiv AC$ și $AM \equiv AN$, unde $M \in AB$ și $N \in AC$, iar $BN \cap CM = \{P\}$. Demonstrați că:

- a) $BN \equiv CM$; b) $\triangle BPC$ este isoscel;
c) semidreapta AP este bisectoarea unghiului BAC .

✿ TESTUL 2 ✿

1. Se consideră triunghiul isoscel ABC , cu $N \in AB$ și $P \in AC$, astfel încât $BN \equiv CP$, iar $BP \cap CN = \{M\}$. Arătați că:

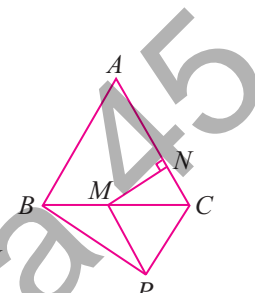
- a) $BP \equiv CN$; b) $NP \parallel BC$; c) Triunghiul BMC este isoscel.

2. Se consideră triunghiul dreptunghic ABC , cu $\sphericalangle BAC = 90^\circ$, iar punctul D este mijlocul ipotenuzei BC . Se notează cu E simetricul punctului A față de punctul D . Arătați că:

- a) $AB \equiv CE$; b) $\sphericalangle ACE \equiv \sphericalangle BAC$; c) $AD = \frac{BC}{2}$.

3. În triunghiul ABC , BM și CN sunt înălțimi, $M \in AC$ și $N \in AB$. Pe semidreapta MB se ia punctul P astfel încât $BP \equiv AC$, punctul B fiind interior segmentului PM , iar pe semidreapta NC se ia punctul T astfel încât $CT \equiv AB$, punctul C fiind interior segmentului NT . Arătați că:

- a) $\sphericalangle ABP \equiv \sphericalangle ACT$; b) $AP \equiv AT$; c) $\sphericalangle PAT = 90^\circ$.



Algebră

Capitolul I Mulțimea numerelor reale

PP Competențe specifice

- C1. Identificarea numerelor aparținând diferitelor submulțimi ale lui \mathbb{R}
- C2. Aplicarea regulilor de calcul pentru estimarea și aproximarea numerelor reale
- C3. Utilizarea unor algoritmi și a proprietăților operațiilor în efectuarea unor calcule cu numere reale
- C4. Folosirea terminologiei aferente noțiunii de număr real (semn, modul, opus, invers)
- C5. Elaborarea de strategii pentru rezolvarea unor probleme cu numere reale
- C6. Modelarea matematică a unor situații practice care implică operații cu numere reale

Rădăcina pătrată

PE-PP 1. Rădăcina pătrată a unui număr natural pătrat perfect



• Numărul natural x se numește **pătrat perfect** dacă există numărul întreg a cu proprietatea că $x = a^2$, unde $a \in \mathbb{Z}$.

• Numărul $|a|$ se numește **rădăcina pătrată** a numărului x și se notează cu \sqrt{x} .

• $\sqrt{x^2} = |x|$, pentru orice număr întreg x .

Observații: Dacă x este un număr natural nenul, pătrat perfect, atunci există două numere distincte al căror pătrat este x , și anume \sqrt{x} și $-\sqrt{x}$. Evident că numai unul dintre ele este număr natural. De aceea, dacă $a \in \mathbb{Z}$, atunci $\sqrt{a^2} = |a|$.

a) $x = a^2$ implică $\sqrt{x} = \sqrt{a^2} = |a|$. b) Dacă $a \geq 0$, atunci $\sqrt{a^2} = a$.

Exemple: $\sqrt{100} = \sqrt{10^2} = |10| = 10$; $\sqrt{64} = \sqrt{(-8)^2} = |-8| = 8$;

$\sqrt{25x^2y^4} = \sqrt{(5xy^2)^2} = |5xy^2| = 5y^2|x|$.

● ● ● activități de învățare ● ● ●

PE Înțelegere *

1. Copiați și completați următorul tabel ($x \in \mathbb{Z}$):

x	-5	-3	-2	0			9	12
x^2					16	36		

2. a) Scrieți toate pătratele perfecte mai mici decât 90.
 b) Scrieți toate numerele pătrate perfecte cuprinse între 140 și 290.
 c) Scrieți pătratele perfecte de trei cifre, mai mari ca 300.
3. Determinați numerele raționale care au pătratul egal cu:
 a) 25; b) 64; c) 121; d) 729; e) 1296.
4. Descompuneți în factori primi numerele următoare și arătați că sunt pătrate perfecte:
 a) 36; b) 64; c) 1; d) 169; e) 324; f) 529;
 g) $2^8 \cdot 81$; h) $49 \cdot 64 \cdot 5^2$; i) $4^3 \cdot 5^6$; j) $16^3 \cdot (-5)^4$; k) $121 \cdot 169^3$.
5. Stabiliți care dintre următoarele numere sunt pătrate perfecte:
 a) 36; 4; 15; 56; 169; 190; 196; 225; 240; 256;
 b) 13^2 ; $(-9)^4$; 3^8 ; $(-7)^5$; 18^3 ; $(-12)^{18}$; $(-21)^7$; $(-28)^6$;
 c) 5^{8n} ; 7^{6n+4} ; 28^{n^2+1} ; 15^{n^2+n} ; 12^{n^2-n+6} , $n > 1$, $n \in \mathbb{N}$.
6. Fie $A = \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5\}$ și $B = \{y \mid y = x^2, x \in A\}$.
 a) Determinați elementele mulțimii B .
 b) Determinați elementele mulțimii $C = \{z \mid z = \sqrt{y}, y \in B\}$.
7. Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:
 a) $\sqrt{64} = 8$; b) $\sqrt{(-5)^2} = -5$; c) $\sqrt{123^2} = 123$;
 d) $\sqrt{(-432)^2} = 432$; e) $\sqrt{49a^2} = 7a, a < 0$; f) $\sqrt{(-25a^2)^2} = 5a^2$;
 g) $\sqrt{(-64a)^4} = 8a^2$; h) $\sqrt{81a^8b^2} = 9a^4b, b < 0$.
8. Rezolvați ecuațiile:
 a) $x^2 = 36$; b) $x^2 = 1600$; c) $5x^2 = 245$;
 d) $-2x^2 = -72$; e) $x^2 + 9 = 265$; f) $x^2 - 14 = 155$;
 g) $-3x^2 + 175 = -257$; h) $-2x^2 + 27 = -101$; i) $(x-3)^2 = 4$;
 j) $(x+4)^2 = 9$; k) $25 - (x+3)^2 = 9$; l) $-144 - (x-5)^2 = -225$;
 (i) în mulțimea numerelor naturale;
 (ii) în mulțimea numerelor întregi.
9. Folosind formula $1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$, unde $a \neq 1$ și $n \in \mathbb{N}^*$, calculați:
 a) $\sqrt{x+1}$, unde $x = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{201}$;
 b) $\sqrt{2x+1}$, unde $x = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{249}$;
 c) $\sqrt{4x+1}$, unde $x = 1 + 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{359}$;
 d) $\sqrt{8x+1}$, unde $x = 1 + 3^2 + 3^4 + 3^6 + \dots + 3^{98}$;

29. Calculați:

- a) $\sqrt{6^3 \cdot 6}$; b) $\sqrt{11^4 \cdot 9}$; c) $\sqrt{2^6 \cdot 3^4 \cdot 25}$; d) $\sqrt{196 \cdot 2^6 \cdot 81}$;
 e) $\sqrt{15^2 - 9^2 + 5^2}$; f) $\sqrt{72^2 - 71^2 + 5^2 + 1}$; g) $\sqrt{7(12^2 - 9^2)}$; h) $\sqrt{2^8(7^2 - 2^4 \cdot 3)}$.

30. Efectuați:

- a) $\sqrt{2^6(5^2 - 3^2)}$; b) $\sqrt{5^2 \cdot 2^4 + 5^2 \cdot 3^2}$; c) $\sqrt{5^2 \cdot 17^2 - 2^6 \cdot 5^2}$; d) $\sqrt{13^2 - 5^2 + 9^2}$;
 e) $\sqrt{15^2 + 8^2}$; f) $\sqrt{16^2 + 12^2 + 15^2}$; g) $\sqrt{18^2 + 24^2 + 40^2}$; h) $\sqrt{26^2 - 24^2}$.

31. Efectuați calculele:

- a) $\sqrt{12^2 + 9^2}$; b) $\sqrt{15^2 - 9^2 + 16^2}$; c) $\sqrt{15^2 + 20^2}$; d) $\sqrt{30^2 - 24^2}$;
 e) $\sqrt{3^2 \cdot 5^2 + 2^6}$; f) $\sqrt{3^4 \cdot 13^2 - 3^4 \cdot 5^2}$; g) $\sqrt{2^6 \cdot 7^2 + 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7^2}$.

PE Aprofundare și performanță ***

32. Efectuați calculele:

- a) $\sqrt{6 \cdot \sqrt{576}} + \sqrt{3 \cdot \sqrt{144}}$; b) $\sqrt{760 - \sqrt{961}} + \sqrt{1331 - \sqrt{1225}}$;
 c) $\sqrt{63 + 3 \cdot \sqrt{729}} + \sqrt{540 + 2 \cdot \sqrt{324}}$; d) $\sqrt{399240 + \sqrt{32902}} + \sqrt{910116}$.

33. Calculați:

- a) $\sqrt{6911 - \sqrt{261850 - \sqrt{531441}}}$; b) $\sqrt{286594 - \sqrt{135920 + \sqrt{58081}}}$;
 c) $\sqrt{5\sqrt{3\sqrt{455625}} + \sqrt{18\sqrt{24\sqrt{46656}}}}$; d) $\sqrt{669 + \sqrt{75\sqrt{18\sqrt{16384}}}}$.

34. Calculați:

- a) $\sqrt{119010 - \sqrt{455025 - \sqrt{561001}}}$; b) $\sqrt{66673 - \sqrt{389963 - \sqrt{344569}}}$.

PE-PP Supermate ****

35. Determinați $x \in \mathbb{N}$, știind că:

- a) $\sqrt{1 \cdot 7 + 6 \cdot 7 + 6 \cdot 7^2 + 6 \cdot 7^3 + \dots + 6 \cdot 7^{2019}} = 7^x$;
 b) $9\sqrt{3^{2018} - 2 \cdot 3^{2017} - 2 \cdot 3^{2016} - \dots - 2 \cdot 3 - 2} = 3^x$;
 c) $\sqrt{1 + 2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^3 + \dots + 2 \cdot 3^{2019}} = 3^x$;
 d) $\sqrt{2^{1980} - 2^{1979} - 2^{1978} - \dots - 2^{1002}} = 2^x$;
 e) $\sqrt{13 + 12 \cdot 13 + 12 \cdot 13^2 + 12 \cdot 13^3 + \dots + 12 \cdot 13^{2018} + 12 \cdot 13^{2019}} = 13^{2x}$.

36. Demonstrați că numărul $a = 5^{2n+1} \cdot 4^{3n+2} + 10^{2n+1} \cdot 2^{4n+1}$ este pătrat perfect, $\forall n \in \mathbb{N}$.

37. Calculați $x \in \mathbb{N}$, știind că $\sqrt{3^{600} - 2 \cdot 3^{599} - 2 \cdot 3^{598} - 2 \cdot 3^{597} - \dots - 2 \cdot 3^{479} - 2 \cdot 3^{478}} = 3^x$.

38. Câte pătrate perfecte conțin mulțimile:

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid 0 \leq x \leq 144\} \text{ și } B = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 400\}?$$

Mulțimea numerelor reale

PE-PP 1. Modulul unui număr real. Reprezentarea pe axă a numerelor reale. Aproximări și rotunjiri. Ordonări



- Numerele care au partea zecimală infinită și neperiodică se numesc **numere iraționale**.
- Dacă $p \in \mathbb{N}^*$ și p nu este pătrat perfect, atunci \sqrt{p} este număr irațional.

Exemple: $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{7}, \sqrt{10}, \sqrt{2018}$.

• **Reuniunea** mulțimii numerelor raționale cu mulțimea numerelor iraționale este mulțimea numerelor reale.

• Se notează cu \mathbb{R} mulțimea numerelor reale și cu $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ mulțimea numerelor iraționale.

• Avem șirul de incluziuni: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

• $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$; $\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$;

$\mathbb{R} = \mathbb{R}_- \cup \{0\} \cup \mathbb{R}_+$; $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

• **Modulul** unui număr real x este: $|x| = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \geq 0 \\ -x, & \text{dacă } x < 0 \end{cases}$

• $|x| \geq 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

• $|x| = |-x|$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

a) Numim **axă** a numerelor reale o dreaptă, cu un punct fixat numit origine, un sens pozitiv și o unitate de măsură.

b) Oricărui **număr real** îi corespunde **un singur punct** pe axa numerelor și, reciproc, oricărui punct de pe axa numerelor îi corespunde un singur număr real.

c) **Exercițiu:** Vom arăta că numărul $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Demonstrație. Presupunem că $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Atunci există $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, unde $m, n \in \mathbb{Z}^*$ și $(m, n) = 1$,

astfel încât $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$. Rezultă că $m^2 = 2n^2$ (1), de unde 2 divide pe m , adică există $l \in \mathbb{N}^*$, astfel

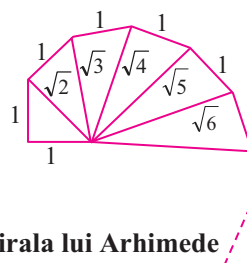
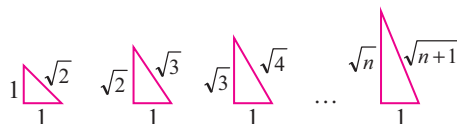
încât $m = 2l$ (2). Revenind la (1), găsim $2l^2 = n^2$, ceea ce conduce la 2 divide pe n , adică există $k \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $n = 2k$ (3). Din (2) și (3) obținem că $2 \mid (m, n)$, în contradicție cu ipoteza

$(m, n) = 1$. Prin urmare, $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

d) Numerele iraționale se reprezintă pe axă în două moduri:

(i) prin aproximare cu numere zecimale;

(ii) prin utilizarea compasului și a construcției următoare:



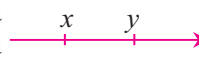
Spirala lui Arhimede

e) Are loc următorul rezultat: Dacă $a \in \mathbb{Q}^*$ și $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, atunci:

i) $a + b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;

ii) $a \cdot b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

• Fie x și y două numere reale astfel încât x este la **stânga** lui y pe axa numerelor. Spunem că x este **mai mic** decât y și scriem $x < y$ sau spunem că y este mai mare decât x și scriem $y > x$.



Dacă $x < y$ sau $x = y$, spunem că x este mai mic sau egal cu y și scriem $x \leq y$ sau că y este mai mare sau egal cu x și scriem $y \geq x$.

Dacă $|x| < |y|$, atunci și $\sqrt{|x|} < \sqrt{|y|}$ și reciproc.

• **Partea întregă** a unui număr real x , notată $[x]$, este cel mai mare număr întreg mai mic sau egal cu x .

Exemple: a) $[3,24] = 3$; b) $[-2,87] = -3$.

• Fie x un număr real. Diferența $x - [x]$ se numește **partea fracționară** a lui x , notată $\{x\}$.

Exemple: a) $\{5,75\} = 5,75 - 5 = 0,75$; b) $\{-5,75\} = -5,75 - (-6) = 6 - 5,75 = 0,25$.

● ● ● activități de învățare ● ● ●

PE Înțelegere *

1. Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

a) $-4 \in \mathbb{Z}$; b) $-\frac{3}{4} \in \mathbb{Q}$; c) $\sqrt{5} \in \mathbb{Q}$; d) $0 \notin \mathbb{N}$; e) $-\frac{\sqrt{49}}{\sqrt{9}} \in \mathbb{Q}$; f) $\sqrt{18} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;

g) $-\sqrt{64} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; h) $\frac{-32}{8} \in \mathbb{Z}$; i) $\frac{3\sqrt{5}}{2} \in \mathbb{Q}$; j) $\{3, 4, 5\} \subset \mathbb{Z}$; k) $\{-7\} \subset \mathbb{Z}$;

l) $\sqrt{11} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; m) $\{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\} \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; n) $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\} \subset \mathbb{N}$;

o) $\left\{-\frac{1}{3}; 0, (6); -\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{49}}; 1,41(6); 1,2(7)\right\} \subset \mathbb{Q}$; p) $\left\{-\frac{3}{8}; -2,91(6); 2,3(8); \frac{-4\sqrt{25}}{\sqrt{9}}; \frac{5\sqrt{36}}{-\sqrt{49}}\right\} \not\subset \mathbb{Q}$.

2. Se consideră numerele: -7 ; -4 ; 6 ; $\frac{2}{3}$; $-\sqrt{64}$; $2,08(3)$; $-\sqrt{3}$; $-\sqrt{12}$; $\sqrt{(-15)^2}$; $\sqrt{(-18)^2}$;

$-0,8(3)$; 2 ; 17 ; $\sqrt{144}$; $-\sqrt{169}$. Precizați care dintre numerele de mai sus sunt:

- a) numere naturale; b) numere raționale; c) numere întregi;
d) numere negative; e) numere reale; f) numere iraționale.

3. Fie mulțimea $A = \{x \mid x = \sqrt{n}, n \in \mathbb{N}, n \leq 125\}$. Determinați probabilitatea ca, alegând la întâmplare numărul n , numărul corespunzător x să fie:

- a) rațional; b) irațional.

4. a) Reprezentați pe axă punctele: $A(\sqrt{4})$; $B\left(\sqrt{\frac{49}{4}}\right)$; $C\left(-\sqrt{\frac{128}{2}}\right)$; $D(-\sqrt{6,25})$.

b) Fie E, F, G, H simetricile punctelor A, B, C , respectiv D , față de originea axei. Determinați abscisele punctelor E, F, G, H și reprezentați pe axă aceste puncte.

c) Calculați abscisele punctelor M, N, P, Q , mijloacele segmentelor HB, GA, CE , respectiv FD și reprezentați-le pe axă.

d) Determinați lungimile segmentelor $|CG|, |EA|, |DH|, |QM|, |MN|, |PA|$.

5. Se dau numerele $\sqrt{125}$; $\sqrt{4,25}$; $\sqrt{245,64}$; $\sqrt{1200}$; $\sqrt{256,24}$.

- a) Aproximați prin lipsă, la sutime, numerele de mai sus.
b) Aproximați prin adaos, la sutime, numerele de mai sus.

❀ TESTUL 1 ❀

• Timp de lucru: 50 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

(1p) 1. Calculați:

a) $\sqrt{121}$; b) $\sqrt{18^4}$; c) $\sqrt{12^2 + 16^2}$; d) $\sqrt{40^2 - 24^2}$.

(1p) 2. Arătați că numărul $a = 2(1 + 2 + 3 + \dots + 224) + 225$ este pătrat perfect și apoi calculați \sqrt{a} .

(1p) 3. Folosind algoritmul de extragere a rădăcinii pătrate, calculați:

a) $\sqrt{6084}$; b) $\sqrt{28224}$; c) $\sqrt{300304}$.

(2p) 4. Calculați $\sqrt{9+9} \cdot \sqrt{64} - \sqrt{13^2 - 5^2} + 100 \cdot \sqrt{0,0324}$.

(2p) 5. Fie mulțimea $A = \left\{ -\frac{4}{7}; 0,8(3); \frac{8}{4}; \sqrt{81}; \sqrt{98}; \frac{\sqrt{6}}{2}; 0,28; \frac{3}{\sqrt{0,36}}; \sqrt{50}; -\frac{4,5}{\sqrt{0,0625}} \right\}$.

Scrieți elementele mulțimilor: $A \cap \mathbb{N}$; $A \cap \mathbb{Z}$; $A \cap \mathbb{Q}$; $A \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$; $A \cap (\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z})$.

(2p) 6. Aflați cel mai mare număr întreg mai mic decât $\sqrt{336}$.

❀ TESTUL 2 ❀

• Timp de lucru: 50 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

(1p) 1. Calculați:

a) $\sqrt{196}$; b) $\sqrt{16^6}$; c) $\sqrt{24^2 + 32^2}$; d) $\sqrt{45^2 - 27^2}$.

(1p) 2. Arătați că numărul $a = (2 + 4 + 6 + \dots + 288) - 144$ este pătrat perfect și apoi calculați \sqrt{a} .

(1p) 3. Folosind algoritmul de extragere a rădăcinii pătrate, calculați:

a) $\sqrt{7569}$; b) $\sqrt{55696}$; c) $\sqrt{219024}$.

(2p) 4. Calculați $\sqrt{36+12} \cdot \sqrt{81} - \sqrt{30^2 - 24^2} + 100 \cdot \sqrt{0,0256}$.

(2p) 5. Fie mulțimea $A = \left\{ -3,24; -2,(6); \sqrt{9}; \sqrt{10}; \frac{\sqrt{6^2}}{3}; \sqrt{2\frac{7}{9}}; -\sqrt{12}; \sqrt{18}; \sqrt{49}; 0,08(3); -\sqrt{64} \right\}$.

Scrieți elementele mulțimilor: $A \cap \mathbb{N}$; $A \cap \mathbb{Z}$; $A \cap \mathbb{Q}$; $A \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$; $A \cap (\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z})$.

(2p) 6. Aflați cel mai mic număr întreg mai mare decât $\sqrt{260}$.

PE-PP 8. Ecuații de forma $x^2 = a$, $a \in \mathbb{R}$



- A rezolva o ecuație de forma $x^2 = a$, cu $a \in \mathbb{R}$, în mulțimea $P \subseteq \mathbb{R}$, înseamnă a determina toate valorile $x_0 \in P$ pentru care propoziția $x_0^2 = a$ este adevărată.
- Valorile găsite, dacă există, se numesc **soluții** ale ecuației, iar mulțimea lor, notată de obicei cu S , se numește **mulțimea soluțiilor** ecuației. Dacă mulțimea P nu este precizată, se consideră $P = \mathbb{R}$.
- Rezolvarea ecuației $x^2 = a$, unde $a \in \mathbb{Q}$, necesită analiza a trei cazuri:
 1. Dacă $a < 0$, atunci $S = \emptyset$, deoarece $x^2 \geq 0 > a$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
 2. Dacă $a = 0$, atunci ecuația devine $x^2 = 0$, având soluția unică $x = 0$. Deci, $S = \{0\}$.
 3. Dacă $a > 0$, atunci ecuația $x^2 = a$ se poate scrie sub forma $x^2 - a = 0$, adică $(x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a}) = 0$, având soluțiile: $x_1 = -\sqrt{a}$ și $x_2 = \sqrt{a}$, adică $S = \{-\sqrt{a}, \sqrt{a}\}$. Sau: $x^2 = a$, $a > 0$, se mai poate scrie $|x| = \sqrt{a} \Leftrightarrow x \in \{-\sqrt{a}, \sqrt{a}\}$.

Exerciții rezolvate:

1. Ecuația $x^2 = 1 - \sqrt{4}$ nu are soluții, deoarece $1 - \sqrt{4} < 0$, deci $S = \emptyset$.
2. Ecuația $7x^2 - 5 = 5(x + 1)(x - 1)$ este echivalentă cu $7x^2 - 5 = 5x^2 - 5$, de unde rezultă că $2x^2 = 0$, adică $x^2 = 0$, deci $S = \{0\}$.
3. Ecuația $5x^2 - 45 = 0$ este echivalentă cu $x^2 = 9$, deci $S = \{-3, 3\}$. Această ecuație se poate rezolva și prin altă metodă: $5x^2 - 45 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow (x - 3)(x + 3) = 0$, de unde se obține $x - 3 = 0$ sau $x + 3 = 0$, adică $x = 3$ sau $x = -3$, de unde $S = \{-3, 3\}$.
4. $x^2 + 6x + 9 = 16 \Leftrightarrow (x + 3)^2 = 4^2$, de unde rezultă că $x + 3 = 4$ sau $x + 3 = -4$ și se obțin soluțiile $x_1 = 1$ și $x_2 = -7$, deci $S = \{-7, 1\}$. Se poate rezolva și altfel: $(x + 3)^2 = 16 \Leftrightarrow (x + 3)^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow (x + 3 - 4)(x + 3 + 4) = 0$, de unde $x - 1 = 0$ sau $x + 7 = 0$, adică $x_1 = 1$ și $x_2 = -7$.
5. $9x^2 = 27 + 18\sqrt{2} \Leftrightarrow 9x^2 = 18 + 18\sqrt{2} + 9 \Leftrightarrow 9x^2 = (3\sqrt{2})^2 + 2 \cdot 3\sqrt{2} \cdot 3 + 3^2 \Leftrightarrow 9x^2 = (3\sqrt{2} + 3)^2 \Leftrightarrow 9x^2 = 9(\sqrt{2} + 1)^2 \Leftrightarrow x^2 = (\sqrt{2} + 1)^2 \Leftrightarrow |x| = \sqrt{2} + 1$, adică $x = \sqrt{2} + 1$ sau $x = -\sqrt{2} - 1 \Rightarrow x_1 = \sqrt{2} + 1$ și $x_2 = -\sqrt{2} - 1$. $S = \{-\sqrt{2} - 1; \sqrt{2} + 1\}$.

● ● ● **activități de învățare** ● ● ●

PE **Înțelegere** *

1. Precizați care dintre ecuațiile de mai jos admit pe $x = -2$ ca soluție:
 - a) $x^2 = 4$;
 - b) $3x^2 = 18$;
 - c) $(x - 3)^2 = 25$;
 - d) $2x^2 - 3 = 5$;
 - e) $(2x + 1)^2 = 27$;
 - f) $(2x - 3)^2 = 49$;
 - g) $x^3 - 8 = -3$;
 - h) $2x^2 - 9 = -1$.
2. A. Verificați dacă -3 este soluție a următoarelor ecuații:
 - a) $x^2 = 9$;
 - b) $7x^2 - 2 = 61$;
 - c) $(x - 1)^2 = 4$;
 - d) $(2x + 1)^2 = 49$.B. Verificați dacă -2 este soluție a următoarelor ecuații:
 - a) $x^2 = 4$;
 - b) $5x^2 - 3 = 17$;
 - c) $(x + 1)^2 = 9$;
 - d) $(2x - 1)^2 = 25$.

3. Rezolvați ecuațiile:

- | | | | |
|-----------------------|---------------------|-----------------|-----------------|
| a) $x^2 = 1$; | $x^2 = 81$; | $4x^2 = 1$; | $2x^2 = 8$; |
| b) $3x^2 = 75$; | $49x^2 = 121$; | $25x^2 = 225$; | $36x^2 = 144$; |
| c) $x^2 - 0,25 = 0$; | $2x^2 - 0,32 = 0$; | $4x^2 = 0,04$; | $3x^2 = 10,8$. |

4. Determinați $x \in \mathbb{R}$, astfel încât:

- | | | |
|----------------------------|---|----------------------------|
| a) $\frac{1}{9}x^2 = 16$; | $\frac{1}{100}x^2 - \frac{1}{64} = 0$; | $\frac{1}{25}x^2 = 0,49$; |
| b) $2x^2 = 3$; | $3x^2 = 7$; | $4x^2 = 11$; |
| c) $9x^2 - 10 = 0$; | $25x^2 - 32 = 0$; | $49x^2 - 24 = 0$; |
| d) $4x^2 = 0,5$; | $144x^2 = 25$; | $3x^2 - 0,3 = 0$. |

5. Determinați $x \in \mathbb{R}$, știind că:

- | | | |
|--------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------------------|
| a) $\frac{2x}{5} = \frac{125}{8x}$; | b) $\frac{4x}{27} = \frac{3}{x}$; | c) $\frac{3x}{16} = \frac{1}{27x}$; |
| d) $\frac{36}{3x} = \frac{75x}{9}$; | e) $\frac{9}{5x} = \frac{20x}{4}$; | f) $\frac{4}{6x} = \frac{54x}{25}$. |

6. Determinați $x \in \mathbb{R}$, din ecuațiile:

- | | | | |
|---|--|-------------------------------|-----------------------|
| a) $\frac{1}{16}x^2 = 25$; | b) $\frac{1}{100}x^2 - \frac{1}{64} = 0$; | c) $\frac{1}{25}x^2 = 0,36$; | d) $36x^2 - 25 = 0$; |
| e) $\frac{1}{81}x^2 - \frac{1}{36} = 0$; | f) $\frac{1}{16}x^2 = 0,64$; | g) $\frac{1}{25}x^2 = 1,44$. | |

7. Determinați $x \in \mathbb{R}$, astfel încât:

- | | | | |
|-------------------------------|--------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| a) $\frac{1}{36}x^2 = 0,25$; | b) $\frac{1}{6,4}x^2 = 2,5$; | c) $\frac{1}{16}x^2 = 2,25$; | d) $\frac{1}{25}x^2 = 2,56$; |
| e) $\frac{1}{64}x^2 = 0,25$; | f) $\frac{1}{225}x^2 = 1,44$; | g) $\frac{1}{36}x^2 = 2,25$; | h) $\frac{1}{10}x^2 = 6,4$. |

8. Determinați mulțimea soluțiilor fiecărei ecuații:

- | | | | |
|------------------------|------------------------|------------------------|-------------------------|
| a) $x^2 = 9$; | b) $3x^2 = 12$; | c) $2x^2 - 72 = 0$; | d) $(x - 2)^2 = 25$; |
| e) $(2x - 3)^2 = 25$; | f) $(2x + 1)^2 = 49$; | g) $(2x + 5)^2 = 81$; | h) $(2x - 5)^2 = 121$. |

9. Rezolvați ecuațiile:

- | | | | |
|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|
| a) $(x + 2)^2 = 49$; | b) $(x - 3)^2 = 36$; | c) $(x + 4)^2 = 25$; | d) $(x - 5)^2 = 64$; |
| e) $3(x + 2)^2 = 48$; | f) $5(x - 2)^2 = 45$; | g) $4(x + 6)^2 = 36$; | h) $6(x - 2)^2 = 54$. |

10. Determinați mulțimea soluțiilor fiecărei ecuații:

- | | | | |
|-------------------------------|--|----------------------------|----------------------------|
| a) $2x^2 + 5 = 13$; | b) $8x^2 - 2 = 0$; | c) $6x^2 - 3 = 0$; | d) $16x^2 + 15 = 14$; |
| e) $2x^2 = 1 - (-1)^{2019}$; | f) $-\frac{5}{3}x^2 = -\frac{20}{3}$; | g) $2(x + 2)^2 + 6 = 18$; | h) $3(x - 1)^2 + 5 = 17$. |

11. Determinați soluțiile ecuațiilor:

- | | | |
|--------------------------------------|---|---|
| a) $5(x^2 - 8) = 0$; | b) $0,1x^2 + 0,03 = 0,04$; | c) $\frac{1}{9}x^2 + 3 = \frac{76}{25}$; |
| d) $0,3x^2 + 0,19 = \frac{23}{50}$; | e) $\frac{1}{4}x^2 + 0,4 = \sqrt{0,25}$. | |

12. Rezolvați ecuațiile de forma $x^2 = a$, ($a \in \mathbb{R}$):

- | | | | | |
|------------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| a) $x^2 = 196$; | $x^2 = 432$; | $x^2 = 144$; | $x^2 = 128$; | $x^2 = 324$; |
|------------------|---------------|---------------|---------------|---------------|

d) $(2x - 3\sqrt{2})^2 = 98$; e) $(2x + 5\sqrt{2})^2 = 162$; f) $(2x - 3\sqrt{3})^2 = 243$;
g) $(2x + 3\sqrt{2})^2 = 50$; h) $(2x - 7\sqrt{2})^2 = 242$; i) $(2x + 5\sqrt{3})^2 = 147$.

20. Rezolvați ecuațiile:

a) $2(x + \sqrt{3})^2 = 24$; b) $3(x - \sqrt{2})^2 = 96$; c) $2(\sqrt{8} - x)^2 = 64$;
d) $3(x + \sqrt{12})^2 = 144$; e) $2(\sqrt{18} - x)^2 = 100$; f) $3(x + \sqrt{27})^2 = 225$;
g) $2(x + \sqrt{32})^2 = 144$; h) $3(x - \sqrt{48})^2 = 81$; i) $2(x - \sqrt{12})^2 = 150$.

21. Determinați mulțimea soluțiilor fiecăreia din ecuațiile de mai jos.

a) $3(x - 2\sqrt{2})^2 - 8 = 88$; b) $2(x + 3\sqrt{3})^2 + 25 = 241$; c) $4(x + 4\sqrt{3})^2 - 41 = 67$;
d) $2(x - 5\sqrt{3})^2 + 39 = 333$; e) $3(x + 7\sqrt{3})^2 - 62 = 82$; f) $4(x - 3\sqrt{2})^2 + 49 = 337$;
g) $5(x - 6\sqrt{2})^2 + 43 = 133$; h) $3(x - 4\sqrt{2})^2 - 82 = 68$.

PE-PP Supermate ****

22. Arătați că, dacă numerele reale pozitive x, y, z verifică relația $x + y + z = 2$, atunci numărul $n = \sqrt{(xy + 2z)(yz + 2x)(zx + 2y)}$ este număr rațional.

23. Rezolvați ecuația $x + y + z + 8 = 2(\sqrt{x-1} + 2\sqrt{y-2} + 3\sqrt{z-3})$, unde $x, y, z \in \mathbb{R}$, cu $x \geq 1, y \geq 2, z \geq 3$.

24. Determinați numerele reale x, y, z pentru care următoarea egalitate este adevărată:

$$\sqrt{x+50} + \sqrt{y+100} + \sqrt{z+150} = \frac{x+y+z+312}{4},$$

unde $x \geq -50, y \geq -100, z \geq -150$.

PE-PP 9. Probleme de matematică aplicată în viața cotidiană

1. Suprafața unei curți de formă dreptunghiulară, cu lungimea de trei ori mai mare decât lățimea, este de 1323 m^2 .

Știind că se împrejmuește terenul cu un gard format din patru rânduri de sârmă, ce lungime are colacul de sârmă care trebuie folosit?

2. Pe un perete cu dimensiunile de 4 m lungime și 2,7 m lățime trebuie amplasată o fereastră în formă de pătrat, care are suprafața egală cu 30% din suprafața peretelui.

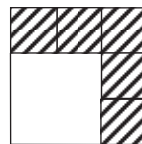
Care trebuie să fie dimensiunile ferestrei?

3. Un teren de sport are aria de 324 m^2 și formă de pătrat.

Cu cât trebuie să se mărească latura terenului pentru ca aria să se mărească cu 576 m^2 ?

4. Un pătrat cu aria de 729 cm^2 este împărțit în pătrate ca în figura alăturată.

Care este aria pătratului alb? Dar latura sa?



5. Suprafața unei sufragerii în formă de pătrat este egală cu suma suprafețelor a două dormitoare în formă de pătrat cu latura de 3 m și, respectiv, 4 m.

Pentru a acoperi sufrageria cu mochetă, ce suprafață de mochetă trebuie cumpărată?

6. O încăpere în formă de pătrat are aria egală cu cea a unui teren dreptunghiular având dimensiunile 12,8 m și 5 m. Ea trebuie acoperită cu dale pătrate având latura de 0,4 m.

Câte dale trebuie cumpărate pentru a acoperi podeaua încăperii?

Probleme pentru performanță școlară și pregătirea olimpiadelor

1. a) Dacă a și b sunt numere raționale cu proprietatea că $a\sqrt{3} - b\sqrt{5} = 0$, demonstrați că $a = b = 0$.

b) Determinați toate perechile de numere raționale $(x; y)$ care verifică egalitatea:

$$\sqrt{3(x+1)^2} - 2\sqrt{3} = |y+1| \cdot \sqrt{5} - |\sqrt{3} - \sqrt{5}|.$$

2. Fie numărul $x = \sqrt{2} + \sqrt{2^2} + \sqrt{2^3} + \sqrt{2^4} + \dots + \sqrt{2^{2018}} + \sqrt{2^{2019}}$ și $y = 2^{1010} - \sqrt{2}$. Calculați partea întreagă a numărului $\frac{x}{y}$.

3. Numerele întregi a și b verifică relația $3a + 4b = 100$. Determinați cea mai mică valoare posibilă pe care o poate lua numărul $|a - b|$.

4. Numerele naturale nenule a, b, c verifică relația $\frac{2a}{3b+4c} = \frac{3b}{4c+2a} = \frac{4c}{2a+3b}$. Determinați valorile lui a, b, c știind că $7a - 6b - 5c = 2019$.

5. Se consideră numerele $x = \sqrt{6 - \sqrt{35}}$ și $y = \sqrt{6 + \sqrt{35}}$. Calculați

$$(x - y)^2 \text{ și } (x - y + \sqrt{10})^{2020}.$$

6. Determinați mulțimea $A = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid \sqrt{5 - 2\sqrt{6}} \cdot x - \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} \cdot x \right\}$.

7. Determinați numerele raționale a și b pentru care $\frac{a}{\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}} - \frac{b}{\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}} = \sqrt{2}$.

8. Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuația $3x^2 - 2xy - y - 1 = 0$.

9. Se consideră numerele reale pozitive a, b, c, d astfel încât $a + b + c + d = 1010$. Arătați că $\sqrt{a(b+c+d)} + \sqrt{b(a+c+d)} + \sqrt{c(a+b+d)} + \sqrt{d(a+b+c)} \leq 2020$.

10. a) Dacă $0 < x < 2y < 5$, arătați că numărul $a = \sqrt{(x-2y)^2} + \sqrt{(x+2y-16)^2} + \sqrt{4x^2}$ este pătrat perfect.

b) Demonstrați că nu există x și y numere întregi astfel încât $|x - 3y + 4| + |x + 3y - 4| < 2$.

11. Se consideră numerele reale strict pozitive x, y, z pentru care $x + y + z = 1346$. Arătați că $\sqrt{xy + xz} + \sqrt{xy + yz} + \sqrt{xz + yz} \leq 2019$.

12. Determinați valorile naturale nenule ale lui n pentru care $\frac{2\sqrt{n} - 5\sqrt{3}}{\sqrt{3} + \sqrt{n}} \in \mathbb{Z}$.

Geometrie

Capitolul I Patrulatere

PP Competențe specifice

- C1. Identificarea patruleterelor particulare în configurații geometrice date
- C2. Descrierea patruleterelor utilizând definiții și proprietăți ale acestora, în configurații geometrice date
- C3. Utilizarea proprietăților patruleterelor în rezolvarea unor probleme
- C4. Exprimarea în limbaj geometric a noțiunilor legate de patrulatere
- C5. Alegerea reprezentărilor geometrice adecvate în vederea optimizării calculării unor lungimi de segmente, a unor măsuri de unghiuri și a unor arii
- C6. Modelarea unor situații date prin reprezentări geometrice cu patrulatere

PE-PP 1. Patrulatere convexe



Definiție. Poligonul cu patru laturi se numește **patrulater**.

Definiție. Un patrulater se numește **convex** dacă dreapta suport a oricăreia dintre laturi nu separă celelalte vârfuri ale poligonului care nu se află pe latura dată.

Definiție. Un patrulater se numește **concav** dacă există o dreaptă suport a unei laturi care separă celelalte vârfuri ale poligonului care nu se află pe latura dată.

Teoremă. Suma măsurilor unghiurilor unui patrulater convex este egală cu 360° .

● ● ● activități de învățare ● ● ●

PE Înțelegere *

1. Măsurile unghiurilor A , B și C ale triunghiului ABC sunt proporționale cu numerele 4, 5 și 3. Perpendiculara în C pe BC intersectează paralela prin A la BC în punctul D . Calculați măsurile unghiurilor patrulaterului $ABCD$.
2. În patrulaterul convex $ABCD$ se știe că $\sphericalangle B = 2 \cdot \sphericalangle A$; $\sphericalangle C = 3 \cdot \sphericalangle A$ și $\sphericalangle D = 2 \cdot \sphericalangle B$.
 - a) Calculați măsurile unghiurilor patrulaterului.
 - b) Arătați că diagonala AC nu poate fi congruentă cu latura AB .

- 3.** Determinați măsurile unghiurilor unui patrulater convex, știind că acestea sunt proporționale cu 3, 4, 5 și, respectiv, 6.
- 4.** Suma măsurilor a două dintre unghiurile unui patrulater convex este 170° . Știind că patrulaterul are trei unghiuri congruente, calculați măsurile unghiurilor patrulaterului.
- 5.** Determinați măsurile unghiurilor unui patrulater convex $ABCD$ știind că suma măsurilor unghiurilor B și D este 150° , suma măsurilor unghiurilor A , B și C este 295° și diferența măsurilor unghiurilor A și C este 20° .
- 6.** Determinați măsurile unghiurilor unui patrulater convex, știind că acestea sunt direct proporționale cu 3, 5, 7 și 9.
- 7.** Determinați măsurile unghiurilor unui patrulater convex, știind că acestea sunt direct proporționale cu 1, 2, 3, 4.
- 8.** Calculați măsurile unghiurilor unui patrulater convex $ABCD$ ale cărui unghiuri verifică egalitățile: $\sphericalangle C = \frac{2}{3} \sphericalangle B$; $\sphericalangle D = \frac{1}{6} \sphericalangle B$; $\sphericalangle A = 1\frac{1}{4} \sphericalangle C$.
- 9.** Determinați măsurile unghiurilor unui patrulater convex, știind că sunt invers proporționale cu numerele $0,(3)$; $0,25$; $0,125$ și, respectiv, $0,(1)$.

PE Aplicare și exersare **

- 10.** Triunghiul ABC isoscel are $\sphericalangle A = 36^\circ$ și $AB \equiv AC$. Știind că BD este bisectoarea unghiului ABC , $D \in AC$, și E este mijlocul laturii AB , calculați măsurile unghiurilor patrulaterului convex $BCDE$.
- 11.** În triunghiul ABC , $AD \perp BC$, $D \in BC$ și $\sphericalangle C = 40^\circ$. Se știe că $BH \perp AM$ și că $HM \parallel AC$, unde $H \in AD$ și punctul M este mijlocul segmentului DC . Calculați măsurile patrulaterului $ACMN$, unde $MH \cap AB = \{N\}$.
- 12.** În patrulaterul convex $ABCD$, $\sphericalangle A = 40^\circ$, măsura unghiului B este de $2\frac{3}{5}$ ori mai mare decât măsura unghiului A , iar măsura unghiului C este egală cu media aritmetică a primelor două unghiuri. Aflați măsurile unghiurilor patrulaterului.
- 13.** Calculați măsurile unghiurilor unui patrulater convex $ABCD$, știind că măsura unghiului B este dublul măsurii unghiului A , măsura unghiului C este egală cu $\frac{3}{8}$ din măsura unghiului B , iar $\sphericalangle D \equiv \sphericalangle C$.
- 14.** Determinați măsurile unghiurilor unui patrulater convex $ABCD$, știind că măsurile unghiurilor A , B , C sunt proporționale cu 4, 5 și 6, iar măsurile lui C și D sunt invers proporționale cu $0,5$ și $0,(3)$.
- 15.** Calculați măsurile unghiurilor unui patrulater convex care are toate unghiurile congruente.
- 16.** Aflați măsurile unghiurilor unui patrulater convex $ABCD$ în care măsura unghiului A este media aritmetică a celorlalte trei măsuri, măsura unghiului B este media aritmetică a măsurilor unghiurilor C și D , iar măsura unghiului C este jumătate din măsura unghiului D .

PE Aprofundare și performanță ***

- 17.** Calculați măsurile unghiurilor patrulaterului convex $ABCD$, știind că:
- $$\sphericalangle A = 1,25 \cdot \sphericalangle C; \sphericalangle C = 0,(6) \cdot \sphericalangle B \text{ și } \sphericalangle D = 0,1(6) \cdot \sphericalangle B.$$

